

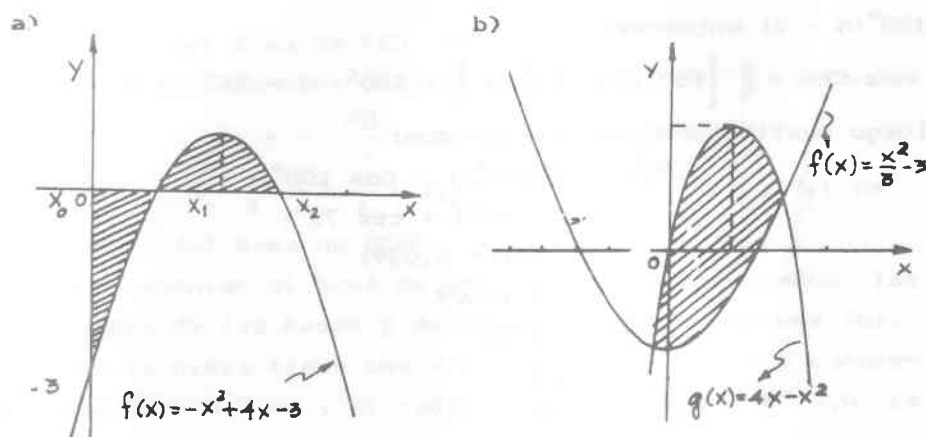


Fig. 111

- a) El área a calcular se encuentra en el intervalo $[x_0; x_2]$ (fig. 111). En el intervalo $[x_0; x_1]$ la curva se encuentra bajo el eje x , luego para calcular el área de esa porción del plano se plantea el módulo de la integral definida en ese intervalo, y en $[x_1; x_2]$ la curva se encuentra por encima de dicho eje, por tanto:

$$A = \left| \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \right| + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (1)$$

Cálculo de los límites de integración

$$x_0 = 0 \quad \text{por datos}$$

x_1 y x_2 son los ceros de la función, luego:

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = 3$$

Cálculo del área.

Sustituyendo en (1) tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + \int_1^3 f(x) dx \\ &= \left| \int_0^1 (-x^2 + 4x - 3) dx \right| + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \\ &= \left| -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right|_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 \\ &= \left| -\frac{1}{3} + 2 - 3 \right| - \frac{27}{3} + 18 - 9 - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) \end{aligned}$$

$$= \left| -\frac{4}{3} \right| - 9 + 18 - 9 - \left(-\frac{4}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} u^2$$

b) Cálculo de los límites de integración (puntos de intersección de los gráficos de la funciones)

$$g(x) = f(x)$$

$$4x - x^2 = \frac{x^2}{3} - 3$$

$$12x - 3x^2 = x^2 - 9$$

$$4x^2 - 12x - 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 144}}{8} = \frac{12 \pm \sqrt{288}}{8} = \frac{12 \pm 17}{8}$$

$$x_1 = \frac{12 + 17}{8} = \frac{29}{8} = 3,625 = 3,6$$

$$x_2 = \frac{12 - 17}{8} = -\frac{5}{8} = -0,625 = -0,6$$

Cálculo del área

$$A = \left| \int_{-0,6}^{3,6} (g(x) - f(x)) dx \right|$$

$$= \left| \int_{-0,6}^{3,6} \left(4x - x^2 - \frac{x^2}{3} + 3 \right) dx \right|$$

$$= \left| \int_{-0,6}^{3,6} \left(3 + 4x - \frac{4x^2}{3} \right) dx \right|$$

$$= \left| 3x + 2x^2 - \frac{4x^3}{9} \right|_{-0,6}^{3,6}$$

$$= \left| 3(3,6) + 2(3,6)^2 - \frac{4(3,6)^3}{9} - \left(3(-0,6) + 2(0,6)^2 - \frac{4(-0,6)^3}{9} \right) \right|$$

$$= \left| 10,8 + 25,92 - 20,736 - (-1,8 + 0,72 + 0,096) \right|$$

$$= \left| 15,984 - (-0,984) \right|$$

$$= \left| 15,984 + 0,984 \right| = 16,968 u^2 = 17 u^2 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 5

Un prisma recto tiene por base un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos mide 6,0 cm y el otro 8,0 cm. Sabemos que el área de la cara mayor es de 200 cm². Halla el volumen del prisma.

Resolución

El volumen del prisma se calcula a través de la fórmula

$$V = A_b \cdot h \quad (1)$$

Como la base es un triángulo rectángulo su área es igual al semiproducto de sus catetos, luego:

$$A_b = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 ; A_b = 24 \text{ cm}^2 \quad (2)$$

Cálculo de la altura del prisma

El área de la cara mayor del prisma está determinada por la altura de este y por el lado mayor del triángulo rectángulo base (la hipotenusa a) (fig. 112), luego:

$$A_{\text{cara}} = a \cdot h$$

$$h = \frac{A_{\text{cara}}}{a} \quad (3)$$

En el $\triangle ABC$ rectángulo en A calculemos a :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{b^2 + c^2} && \text{Teorema de Pitágoras} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} = 10 ; a = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

luego sustituyendo en (3) obtenemos

$$h = \frac{200}{10} = 20 \quad (4)$$

Sustituyendo (2) y (4) en (1) se tiene que:

$$V = 24 \cdot 20 = 480 ; V = 4,8 \cdot 10^2 \text{ cm}^3 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 6

Se quiere conocer el volumen de una pieza cilíndrica con hueco cónico como muestra la figura 113, sabiendo que la altura es de 10,0 cm y el ángulo que forma la generatriz con la base del cono es de 80°

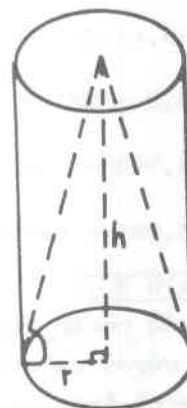


Fig. 113

Resolución

El volumen de la pieza se obtiene restandole al volumen del cilindro el del cono, es decir,

$$V_p = V_{ci} - V_{co}$$

En este caso el radio y la altura del cilindro coinciden con la del cono, luego

$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h \quad (1)$$

La altura de la pieza es conocida, debemos calcular previamente el radio.

$$\tan 80^\circ = \frac{h}{r}$$

$$r = \frac{h}{\tan 80^\circ} = \frac{10}{5,671} = 1,763$$

$$\begin{aligned} \text{luego } V_p &= \frac{2}{3} \cdot 3,142 \cdot (1,763)^2 \cdot 10 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 3,142 \cdot 3,108 \cdot 10 \\ V_p &= 65,1 \text{ cm}^3 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicios (epígrafe 9)

1. La altura de un rectángulo es el triplo de su base. Si su área es de 108 cm^2 , ¿cuáles son sus dimensiones?
2. Un rectángulo tiene 700 cm^2 de área y 110 cm de perímetro. Halla sus dimensiones.
3. Un rectángulo tiene 616 m^2 de área. Si su base es 6 m mayor que su altura, ¿cuáles son sus dimensiones?
4. La diagonal de un rectángulo mide 25 cm y su base 20 cm . Halla su área.
5. Si se triplican las dimensiones de un rectángulo el área de este nuevo rectángulo es equivalente a la de un cuadrado de $26,9 \text{ m}$ de lado. Halla la altura del rectángulo primitivo sabiendo que su base mide 10 m .
6. Halla el área de un rectángulo cuya base y altura son respectivamente iguales al lado del triángulo equilátero y al exágono regular, inscrito en una circunferencia de 20 m de diámetro.

7. En el paralelogramo ABCD

(fig. 114);

E: punto cualquiera de $\overline{AC}$

$\overline{GI}$ y $\overline{HF}$ pasan por E

$\overline{GI} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{HF} \parallel \overline{AB}$

Prueba que:

$$A_{EIBF} = A_{EODH}$$

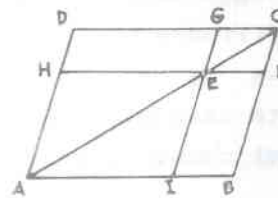


Fig. 114

8.

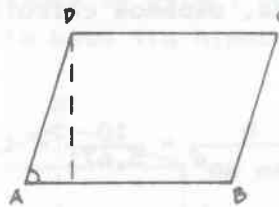


Fig. 115

En el paralelogramo ABCD

(fig. 115);

$\overline{AB} = 45 \text{ m}$, $\overline{AD} = 15 \text{ m}$ y

$\angle A = 70^\circ$

Halla A_{ABCD}

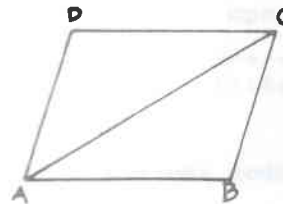


Fig. 116

9. En el paralelogramo ABCD

(fig. 116);

$\angle A = 45^\circ$, $\overline{AC} = 43 \text{ m}$ y

$h = 15 \text{ m}$.

Halla A_{ABCD}

10. La altura de un triángulo equilátero mide 6,92 m. Halla su área.

11. Demuestra que el área de un triángulo equilátero en función de su altura h está dada por la fórmula:

$$A = \frac{h^2 \sqrt{3}}{3}$$

12. Un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 30° y su área 13,84 m^2 . Calcula la longitud de sus catetos.

13. La diagonal mayor de un rombo mide 40 m y uno de sus lados 25 m. Halla la otra diagonal y su área.

14. Un ángulo de un rombo mide $111,1^\circ$ y la diagonal opuesta a dicho ángulo 8,246 m. Halla el lado del rombo y su área.

15. Si las bases de un trapecio miden 44 y 56 m respectivamente y su altura es de 20 m. ¿Cuál es su área?

16. La base menor de un trapecio es los $\frac{2}{3}$ de la mayor y la altura los $\frac{3}{2}$ de la diferencia de las bases. Si su área

- es de 372 m^2 , calcula las bases y la altura.
17. La base menor de un trapecio rectángulo mide 12 cm , el lado no perpendicular a las bases $14,1 \text{ cm}$ y este forma con la base mayor un ángulo de 45° . Calcula el área del trapecio.
18. En un trapecio isósceles sus bases miden 45 y 75 cm y cada lado $47,4 \text{ cm}$. Halla la medida de sus diagonales y el área.
19. En el trapecio ABCD

(fig. 117), $\overline{BE} \perp \overline{AC}$,
 $\overline{DF} \perp \overline{AC}$

Prueba que:

$$A_{ABCD} = \frac{\overline{AC}}{2} (\overline{BE} + \overline{DF})$$

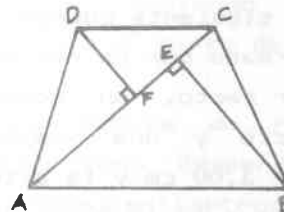


Fig. 117

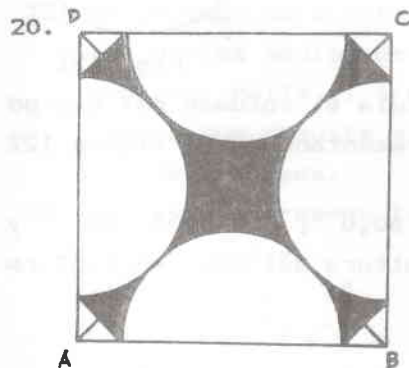


Fig. 118

Haciendo centro en cada uno de los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD (fig. 118) se han trazado semicircunferencias tangentes a las diagonales, uniéndose los extremos de sus diámetros por segmentos para formar la cruz de la figura. Si $\overline{AB} = 20 \text{ cm}$ halla:

- a) el área de la figura no rayada,
 b) el área de la figura rayada.

21. Tomando como diámetro el lado de un octógono regular se han trazado semicircunferencias, formándose el área rayada de la figura 119. Si el radio del octógono mide 10 m , halla el área de la figura rayada.

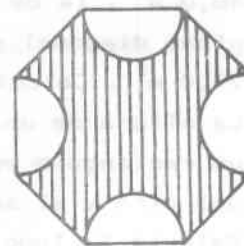


Fig. 119

22.

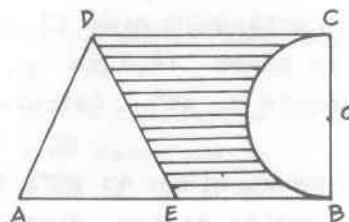


Fig. 120

ABCD: trapecio de base $\overline{AB}$
(fig. 120), $\overline{BC} \perp \overline{AB}$,
E: punto medio de $\overline{AB}$
O: punto medio de $\overline{CB}$
 $\overline{DC} = 6,0$ cm ; $\overline{AB} = 10$ cm ;
 $\overline{CB} = 4,0$ cm .
Halla el área sombreada.

23.

El siguiente cuerpo (fig. 121) formado por un cilindro circular recto, un cono circular recto y una semiesfera. Si $r = 3,00$ cm y la altura del cilindro es $10,0$ cm . Calcula el volumen sombreado.



Fig. 121

24.



Fig. 122

Calcula el volumen del cuerpo representado en la figura 122 si:
 $\alpha = 60,0^\circ$; $r = 3,00$ cm y la altura del cono es $1,50$ cm

25. El área de la base de un ortoedro rectangular es de $48,0$ m² , la de una cara lateral $42,0$ m² y la de un plano diagonal determinado por dos aristas laterales $70,0$ m² . Calcula el área lateral de dicho cuerpo.
26. La altura de un prisma recto mide $6,0$ m , su base es un rectángulo en el que uno de sus lados es el doble del otro y el área total del cuerpo es de 144 m² . Calcula la longitud de una de las diagonales del prisma.
27. La base de una pirámide es un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa igual a $2,82$ m . La arista lateral que contiene al vértice del ángulo recto de di-

cho triángulo es perpendicular a la base e igual a 3,00 m. Calcula el área total de la pirámide y el volumen.

28. Halla el volumen de un cubo sabiendo que la suma de todas sus aristas, de las diagonales del cuerpo y de las diagonales de las caras es igual a 32 m.

29. La generatriz de un cono es igual a la longitud de la circunferencia base y su área lateral $9,0 \text{ m}^2$. Determina la altura y el volumen del cono.

30. Calcula el volumen de una esfera, sabiendo que un círculo menor de área igual a $12,56 \text{ m}^2$ dista del centro de ella 1,5 m.

31. Conservando la base de un cono de 5,0 cm de radio y 30 cm de altura, se obtuvo otro cono desperdiciando 471 cm^3 de su material. ¿En cuántos centímetros disminuyó la altura del primer cono?

32. En un cubo de arista 2,0 cm se hace pasar un plano por los puntos medios de tres aristas concurrentes en un vértice. Halla el área de la sección y el volumen del cuerpo que resulta si al cubo se le quita la esquina así determinada.

33. Calcula el área de la región comprendida entre la curva y el eje x.

a) $f(x) = 6x - x^2$

b) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

c) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

d) $f(x) = \sin x$; $0 \leq x \leq 2\pi$

e) $f(x) = 1 + \cos x$; $-\pi \leq x \leq \pi$

f) $f(x) = \sqrt{x} - 1$; $0 \leq x \leq 2$

34. Halla el área comprendida entre las curvas:

a) $f(x) = x + 3$; $g(x) = x^2 - 3$

b) $f(x) = 2x^2 + 5x$; $g(x) = 2 - x^2$

c) $f(x) = \sin x$; $g(x) = x^2 - \pi x$

d) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \frac{1}{2}x$

e) $f(x) = x^2 - 2x$; $g(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $g(x) = 1$

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Epígrafe 1

- 1 a) 27,37 b) 24,47 c) 16,34 d) 0,19152
e) 53,4 f) 53,75 g) $6,25 \cdot 10^{-5}$ h) 6,3
i) 43,1 j) 0,01 k) 35 l) 1,4
m) 3,3944 n) $\frac{1}{30}$ ñ) $\frac{1}{8}$ o) 2,618
- 2 a) $\frac{5}{8}$ b) -0,3 c) 2,5 d) $3\frac{18}{16}$ e) $6\frac{9}{4}$
f) $1\frac{17}{24}$ g) $\frac{19}{6}$ h) $\frac{7}{6}$ i) $\frac{5}{4}$ j) 0,5
k) $\frac{5}{8}$ l) 1 m) 0,25 n) $\frac{7}{40}$ ñ) $\frac{616}{915}$
o) 57,5 p) $\frac{25}{7}$ q) $\frac{23}{18}$ r) 4
3 a) -0,64 b) 37 c) 299 d) $\frac{17}{4}$ e) 0
f) $\frac{16}{3}$ g) 13,75 h) -4 i) $-\frac{1}{8}$ j) 384
k) 729 l) $\frac{1}{2}$ m) 16 n) $-\frac{9}{4}$ ñ) 227
o) -25 p) 1 q) 43,86 r) $-1,1\sqrt{5}$ s) $3\sqrt{2}$
t) 66,3 u) -4,24 v) 52,5 w) 9,8 x) 1,4
y) $\frac{33}{13}$ z) $\frac{101}{85}$
- 4 a) -608 b) -0,1875 c) 2,36 d) 2,81 e) 1
f) -5 g) -1 h) -19,24 i) 0,18 j) 13,1
k) -0,78 l) -94,72 m) $4\sqrt[4]{10}$ n) 24,75 ñ) 3
o) -8,5 p) -0,5 q) -6
- 5 a) Si b) Si c) Si d) Si e) No f) Si
- 6 a) 6,24 b) $\frac{971}{150}$ c) 82,08 d) -1,88
- 7 a) 2 b) N.S. c) 15,75 d) 25 e) -0,19
f) 24,4 g) 0,73 h) 64 i) 6,5 j) 4
k) 0,8195 l) 0,9542 m) 0,425
- 8 a) 11 b) $\frac{29}{11}$ c) -8,8 d) $-\frac{17}{26}$ e) 1
f) $\sqrt{8}$ g) $0,3\sqrt{6}$ h) 3,73 i) 0,18 j) 4
- 9 a) 12 b) -0,455 c) 18,2
- 10 a) a = 2 b) a = $\frac{8}{5}$ c) a = $-\frac{9}{4}$ d) a = 4
- 11 a) 1 b) -3 c) -0,645 d) 0,8892 e) -0,351

f) 0,342 g) $\frac{2}{9}$ h) -0,144 i) -2,5 j) $-\sqrt{9}$
 k) 10 l) 1 m) $\frac{1}{9}$ n) 2,83

[14] a) 17 b) $-\frac{5}{4}$ c) 0 d) $-\frac{11}{4}$ e) $\frac{4}{5}$ f) 1,47 g) -3,87

[15] 4 meses [16] 9 problemas

[17] Mayor: \$1000 , Segundo: \$600 , Tercero: \$2900

[18] 1a No.2 [19] \$39,72 [20] 398,5 kg [21] \$5,20

[22] 30 min [23] 1 350 L [24] 3 004,56 cab

[25] 977 [26] 76,5% [27] 408 ha [28] \$350

[29] 150,06 m [30] 200 L [31] 5

[32] Cerca: 35,1 m ; Area: 74,7 m² [33] 96 m²

[34] \$847,8 [35] 3 [36] 98 cm³

[37] $2,2 \cdot 10^2$ cm³ [38] $3,2 \cdot 10^4$ galones [39] 1,6 dm³

[40] a) 98 cm² b) $5,3 \cdot 10^2$ cm³ [41] 8,5 cm

Epigrafe 2

[1] a) $10a + 18b + 16c$; V.N: 15 b) $a + b - c$; V.N: 3
 c) $5b - 10x + 3y^2$; V.N: $-4\sqrt{2}$ d) $-4x - 2y$; V.N: -1,7
 e) $2b + 2c + 2xy - yz^3$; V.N: 1,5 f) $2a - b - d$; V.N: $\sqrt{2}$
 g) $3a + x$; V.N: $\frac{12}{13}$ h) $2a - 2x$; V.N: 0
 i) $x^2 - 3xy^3 + 2$; V.N: $\frac{7p}{8d}$

[2] a) $a^4 - b^4$ b) $x^2 + 4x - 21$
 c) $3x^2 + 7x - 6$ d) $9y^2 + 12xy + 4x^2$
 e) $m^3 + n^3$ f) $-x^2 + 11x - 30$
 g) $5x^2 - 1,5x - 0,5$ h) $8p^3 - 4p^2 + \frac{2}{3}p - \frac{1}{27}$
 i) $-2x^2 - 9y^2 + 9xy + 4x - 6y$ j) $25y^2 - 3$
 k) $8m^3 - 125$ l) $a^3b^3 + 3a^2b^2c^2 + 3abc^4 + c^6$
 m) $x^{n+2} + 3x^{n+3} + x^{n+4} - x^{n+5}$

[3] a) $9a^2 + 13a + 3$; V.N: $\frac{25}{8}$ b) $4a^2 + 4a + 2$; V.N: 4,48
 c) $7 - 2x$; V.N: 6 d) $9a^4 - 4b^2$; V.N: 1
 e) $4ab$; V.N: 83,08 f) $4x^2 + x + 5$; V.N: $\frac{55}{p}$
 g) $2m^2 - 2m$; V.N: 4 h) $-7p^2 + 3p - 17$; V.N: $-\frac{81}{4}$